

PSO 模型种群多样性与学习参数的关系研究

申元霞^{1,2}, 王国胤¹, 曾传华²

(1. 重庆邮电大学计算机科学与技术研究所, 重庆 400065;
2. 安徽工业大学计算机科学学院, 安徽马鞍山 243002)

摘要: 粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)算法在求解复杂多峰问题时, 易陷入早期收敛. 通过调整惯性权重和加速系数来控制种群多样性是缓解 PSO 早期收敛的一个重要手段, 但是目前对惯性权重和加速系数的设置主要依赖于实验设计, 缺乏必要的理论支撑. 针对该问题, 本文提出了一种以种群未来的多样性变化调整 PSO 算法参数的方法. 该方法首先在种群当前状态已知的条件下计算种群下一时刻多样性的期望表达式, 再采用多元函数极值理论的分析方法给出了惯性权重, 加速系数与种群下一时刻多样性的数学关系, 该结果为 PSO 学习参数控制种群多样性提供有力的数学理论依据.

关键词: 粒子群; 早期收敛; 种群多样性; 惯性权重; 加速系数

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 06-1238-07

Study on the Relationship Between Population Diversity and Learning Parameters in Particle Swarm Optimization

SHEN Yuan-xia^{1,2}, WANG Guo-yin¹, ZENG Chuan-hua²

(1. Institute of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;
2. School of Computer Science, Anhui University of Technology, Maanshan, Anhui 243002, China)

Abstract: PSO can easily suffer from the premature convergence when solving complex multimodal problems. It is an important method for relieving the premature convergence to control the population diversity by adjusting the inertia weight and acceleration coefficients. However, the setting of the inertia weight and acceleration coefficients is dependent on the design of experiments and lack of the support of the theory. To solve this problem, the new method is proposed in which the change of the prospective population diversity is used to adjust the setting of learning parameters in this paper. Firstly, the expression of the population diversity at the next time step is computed in the condition of the known current population state. Then the mathematic relationship between the inertia weight, acceleration coefficients and the population diversity at the next time step is presented by the extremum theory on multivariate function, which provides a theoretical foundation to control the population diversity by learning parameters.

Key words: premature convergence; population diversity; inertia weight; acceleration coefficients

1 引言

在智能自动化研究领域, 具有群体智能特征的算法正受到越来越多的关注. 粒子群优化(PSO)算法在对动物集群活动行为观察的基础上, 利用群体中的个体对信息的共享使整个群体的运动在问题求解空间中产生从无序到有序的演化过程, 其运动方程可以由下面一组差分方程来描述^[1]:

$$V_{ij}(t+1) = wV_{ij}(t) + c_1r_1(t)(P_{ij}(t) - X_{ij}(t)) + c_2r_2(t)(P_{gj}(t) - X_{ij}(t)) \quad (1)$$

$$X_{ij}(t+1) = X_{ij}(t) + V_{ij}(t+1) \quad (2)$$

其中, X_{ij} 和 V_{ij} 分别代表第 i 个粒子第 j 维的位置与速度分量, $|V_{ij}| \leq V_{\max}$, P_{ij} 为第 i 个粒子个体的历史最佳位置的分量, P_{gj} 为群体所经过的历史最佳位置的分量, w 为惯性权重, c_1 和 c_2 为加速系数, r_1 和 r_2 为 $[0, 1]$ 之间均匀分布的随机数.

PSO 算法概念简明,优化性能良好等优点使其在诸多领域得到了广泛的应用^[2].但是在解决复杂多峰的优化问题时,PSO 易出现早期收敛现象.种群多样性的迅速丧失是导致早期收敛的重要原因之一.目前大量的工作都试图解决 PSO 所面临的早期收敛问题,其中通过控制种群多样性来提高算法全局搜索性能是重要手段,一方面通过引入突变算子^[3],随机扰动^[4]等操作来维持种群多样性和增加粒子逃离局部极值的机会.另一方面是调整 PSO 算法中的惯性权重和加速系数等参数来控制种群的多样性.如非线性惯性权重^[5]、动态惯性权重^[6]、时变加速系数^[7]、动态的加速系数^[8]、随种群多样性测度和种群进化状态自适应调整的惯性权重和加速系数^[9,10],这些策略的目的是使粒子进进化前期或整个进化过程保持较高的种群多样性,增强粒子对解空间的探测能力.上述的改进策略从不同程度上提高 PSO 的全局搜索能力,但是由于惯性权重,加速系数与种群多样性的关系缺乏理论研究,因此对惯性权重,加速系数的调整只能依赖实验设计,没有理论指导.

本文为了探究惯性权重和加速系数的设置对种群多样性的影响,以种群下一时刻的多样性期望为评价指标.首先利用种群多样性的定义对种群下一时刻的种群多样性数学期望进行了分析计算,得出了在当前状态已知的条件下种群下一时刻的种群多样性数学期望的计算表达式.然后,采用期望效用最大化分析法和多元函数极值理论具体得出了 PSO 学习参数 w , c_1 和 c_2 设置与下一时刻种群多样性的关系.

2 种群多样性的定义

种群多样性是影响 PSO 算法全局收敛性能的一个重要因素.高的种群多样性表明群体能够在较大的空间内进行搜索,有助于减少早期收敛现象的产生.但是,若一直保持较高的多样性会减慢算法的收敛速度,甚至导致不收敛.低的种群多样性表明,群体在一个较小的空间内进行搜索,可以提高解的精度^[11].因此,PSO 算法中通过合理地控制种群多样性和利用种群多样性来指导算法的搜索过程可以提高算法的寻优性能.

种群多样性是用来表征群体内个体特征的差异性,其中个体特征包括粒子位置,速度等.种群多样性的实质是粒子的位置相对于某个几何中心的离差程度,通常采用距离的测度方式.下面就粒子位置的特征给出相关的种群多样性定义.

定义 1^[12] 基于种群中心 $X(t)^*$ 的种群位置多样性定义为

$$I(X(t)) = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - X(t)^*]^2 \quad (3)$$

其中, $X(t)^* = (1/NM) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M X_{ij}(t)$, M 为待求解问题的维数, N 为种群的规模.

定义 2^[12] 基于位置重心的种群多样性定义

$$I(X(t)) = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j}(t)]^2 \quad (4)$$

其中 $\overline{X_j}(t) = (1/N) \sum_{i=1}^N X_{ij}(t)$ 是所有粒子位置 $X(t)$ 重心的 j 维分量.

上述的定义分别将种群的中心和重心设置为几何中心点,来测度种群中粒子位置的差异程度,其中定义 2 给出基于位置重心的种群多样性被广泛的应用^[9~11].对于 PSO 的其他个体特征,均可以按上面的定义形式得到粒子速度,个体极值等个体特征多样性的定义.本文采用定义 2 对粒子的位置,速度的多样性进行定义.

3 种群多样性的数学期望

通过粒子的运动方程和种群多样性的定义,可以计算当前种群多样性,但是无法获知下一时刻的种群多样性.文献中利用学习参数 w , c_1 和 c_2 实施控制的多样性是指下一时刻种群多样性.为了研究学习参数对下一时刻种群多样性的影响,必须对种群未来多样性进行预测和评价.本文将对下一时刻种群多样性进行预测并以种群多样性期望为评价指标.由于粒子的位置信息包括了粒子的速度和个体极值信息,因此本文主要研究学习参数对粒子位置多样性的影响.

设当前时刻为 t ,由定义 2 给出种群下一时刻 $t+1$ 时刻多样性的表达式为:

$$I(X(t+1)) = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t+1) - \overline{X_j}(t+1)]^2 \quad (5)$$

其中,粒子在 $t+1$ 时刻的位置由式(1)、(2)确定, t 时刻以及 t 时刻以前的粒子位置和速度等信息已知;显然,式(5)中 $X_{ij}(t+1)$, $\overline{X_j}(t+1)$ 均为 r_1 , r_2 的随机函数.由于 r_1 , r_2 的随机性,因此种群在 $t+1$ 时刻的种群位置多样性 $I(X(t+1))$ 也是随机的.鉴于 $I(X(t+1))$ 的随机性,考察种群位置多样性指标 $I(X(t+1))$ 的期望效用.对式(5)两端求数学期望可得

$$\begin{aligned} E[I(X(t+1))] &= \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M E[X_{ij}(t+1) - \overline{X_j}(t+1)]^2 \\ &= \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M E[X_{ij}(t+1) - EX_{ij}(t+1) \\ &\quad + EX_{ij}(t+1) - \overline{X_j}(t+1)]^2 \\ &= \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \{E[X_{ij}(t+1) - EX_{ij}(t+1)]^2 - 2 \\ &\quad E[X_{ij}(t+1) - EX_{ij}(t+1)][\overline{X_j}(t+1) - EX_{ij}(t+1)]\} \end{aligned}$$

$$+ E[\overline{X_j(t+1)} - X_{ij}(t+1)]^2\} \quad (6)$$

记 $X_{ij}(t+1)$ 的方差为 $D[X_{ij}(t+1)]$, 计算可得下式

$$E[X_{ij}(t+1) - EX_{ij}(t+1)]^2 = D[X_{ij}(t+1)] \quad (7)$$

$$E[(X_{ij}(t+1) - EX_{ij}(t+1)) [X_j(t+1) - EX_j(t+1)]] = (1/N)D[X_{ij}(t+1)] \quad (8)$$

$$E[\overline{X_j(t+1)} - EX_j(t+1)]^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N D[X_{kj}(t+1)] + [EX_{kj}(t+1) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N EX_{kj}(t+1)]^2 \quad (9)$$

将式(7)、(8)和式(9)代入式(6), 可得

$$E[I(X(t+1))] = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \{D[X_{ij}(t+1)] - \frac{2}{N} D[X_{ij}(t+1)] + \frac{1}{N} D[X_{ij}(t+1)] + [EX_{ij}(t+1) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N EX_{kj}(t+1)]^2\} = \frac{N-1}{N^2 M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M D[X_{ij}(t+1)] + I[EX(t+1)] \quad (10)$$

类似 $\overline{X_j(t)}$ 的表示, 记 $\overline{P_j(t)} = (1/N) \sum_{i=1}^N P_{ij}(t)$, $\overline{V_j(t)} = (1/N) \sum_{i=1}^N V_{ij}(t)$, $\overline{P_{gj}(t)} = (1/N) \sum_{i=1}^N P_{gj}(t)$. 显然 $\overline{P_{gj}(t)} = P_{gj}(t)$.

由式(1)和式(2)可得

$$E[X_{ij}(t+1)] = X_{ij}(t) + wV_{ij}(t) + 0.5c_1[P_{ij}(t) - X_{ij}(t)] + 0.5c_2[P_{gj}(t) - X_{ij}(t)] \quad (11)$$

$$D[X_{ij}(t+1)] = (1/12) \{c_1^2 [P_{ij}(t) - X_{ij}(t)]^2 + c_2^2 [P_{gj}(t) - X_{ij}(t)]^2\} \quad (12)$$

由式(11)可得

$$E[\overline{X_j(t)}] = \overline{X_j(t)} + \overline{V_j(t)} + 0.5c_1[\overline{P_j(t)} - \overline{X_j(t)}] + 0.5c_2[\overline{P_{gj}(t)} - \overline{X_j(t)}] \quad (13)$$

由式(11)和式(13)可得下式

$$I[EX(t+1)] = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \{X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)} + w[V_{ij}(t) - \overline{V_j(t)}] + \frac{c_1}{2} [P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}] - \frac{c_2}{2} [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}]\}^2 \quad (14)$$

综合式(10)、(12)和式(14), 可得 $E[I(X(t+1))]$ 是关于 w, c_1, c_2 的一个三元二次函数, 可化为如下形式

$$E[I(X(t+1))] = a_{11}w^2 + a_{22}c_1^2 + a_{33}c_2^2 + a_{12}wc_1 + a_{13}wc_2 + a_{23}c_1c_2 + a_1w + a_2c_1 + a_3c_2 + a_0 \quad (15)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}]^2,$$

$$a_1 = \frac{2}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}][V_{ij}(t) - \overline{V_j(t)}],$$

$$a_2 = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}][P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}],$$

$$a_3 = -\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}]^2,$$

$$a_{11} = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [V_{ij}(t) - \overline{V_j(t)}]^2,$$

$$a_{22} = \frac{1}{4NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}]^2 + \frac{N-1}{12N^2M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{ij}(t) - X_{ij}(t)]^2,$$

$$a_{33} = \frac{1}{4NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}]^2 + \frac{N-1}{12N^2M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{gj}(t) - X_{ij}(t)]^2,$$

$$a_{12} = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [V_{ij}(t) - \overline{V_j(t)}][P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}],$$

$$a_{13} = -\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [V_{ij}(t) - \overline{V_j(t)}][X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}],$$

$$a_{23} = -\frac{1}{2NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}][P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}].$$

显然, 式(15)的二次项系数 a_{11}, a_{22}, a_{33} 皆大于等于零, 那么 $E[I(X(t+1))]$ 关于 w, c_1, c_2 存在极小值. 二次项系数 a_{11} 是粒子当前速度的多样性, 多项式系数 a_0 是粒子当前位置的多样性. 粒子下一时刻位置多样性的期望是通过当前种群个体特征多样性的判断来对下一时刻多样性进行预测. 下面分别就算法参数 w, c_1, c_2 , 讨论它们与下一时刻种群位置多样性的期望 $E[I(X(t+1))]$ 的关系.

4 PSO 学习参数与种群多样性的关系

PSO 算法的学习参数包括惯性权值 w 和加速系数 c_1, c_2 . 当 w, c_1, c_2 皆等于 0 时, 由式(15)知

$$I(X(t+1)) = I(X(t)) \quad (16)$$

此时, 下一时刻种群位置的多样性等于当前时刻种群位置的多样性. 当 w, c_1, c_2 不同时为零, 下文首先分别讨论惯性权重 w 和加速系数 c_1, c_2 对种群下一时刻位置多样性期望 $E[I(X(t+1))]$ 的影响, 最后分析惯性权重 w 和加速系数 c_1, c_2 共同对 $E[I(X(t+1))]$ 的影响.

4.1 惯性权重 w 对 $E[I(X(t+1))]$ 的影响

在加速系数 c_1, c_2 固定不变的情况下, 讨论惯性权重 w 对 $E[I(X(t+1))]$ 的影响, 分为两种情况:

(1) 当 $a_{11} = 0$ 时, 即当前种群的速度多样性为零.

那么对任意 $i, 1 \leq i \leq N$ (N 为种群的规模), 有 $V_{ij}(t) = \overline{V_j(t)}$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$. 此时种群下一时刻位置多样性期望 $E[I(X(t+1))]$ 与 w 的取值无关;

(2) 当 $a_{11} > 0$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 可视为关于 w 的一元二次连续函数, 此时函数 $E[I(X(t+1))]$ 存在极小值. 为了求得极小值, 将 $E[I(X(t+1))]$ 对 w 求导并令其为零. 得

$$\frac{dE[I(X(t+1))]}{dw} = 2a_{11}w + a_{12}c_1 + a_{13}c_2 + a_1 = 0 \quad (17)$$

由式(17)解得 $E[I(X(t+1))]$ 为极小值时惯性权重 w , 记为 w^* , 即

$$w^* = -\frac{a_{12}c_1 + a_{13}c_2 + a_1}{2a_{11}} \quad (18)$$

式中的 c_1, c_2 分别为个体认知加速系数和社会加速系数. 特别地, 当 $c_1 = c_2 = 2$ 时, $w^* = -a_{12}/a_{11}$. 根据 w 与极小值点 w^* 的关系, 可以得到如下结论.

定理 1 对于给定的加速系数 c_1, c_2 , 已知粒子在第 t 时刻的位置 $X(t)$, 速度 $V(t)$, 个体极值 $P_i(t)$ 和群体极值 $P_g(t)$, 并且 $V_{ij}(t) \neq \overline{V_j(t)}$, 则, 当 $w \geq w^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 w 的增加而增加; 当 $w < w^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 w 的增加而减少.

为了直观地分析惯性权重 w 对 $E[I(X(t+1))]$ 的影响, 设计优化标准测试函数 Rastrigin 的实验, 其函数的表达式如式(19)所示. 惯性权重采用从 0.9 到 0.4 线性递减的策略, 加速系数 $c_1 = c_2 = 2$, 种群规模 $N = 40$, 总迭代次数为 10000.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{30-1} [x_j^2 - 10\cos(2\pi x_j) + 10], x_j \in [-5.12, 5.12] \quad (19)$$

从图 1 可见, w^* 的值在整个进化过程中主要集中在 0.5 附近, 且在 4000 步以前变化较为平稳, 对应于图 2, 种群位置的多样性缓慢的下降(为了便于观察多样性曲线, 本文对种群多样性取以 10 为底的对数); 在 4000 步之后, w^* 的值出现了较为激烈的振荡, 此时种群位置的多样性的变化幅度较大, 先急速下降后较长时间的震荡再下降. w 在 5000 步之前不断的接近于 w^* , 种群位置的多样性在此期间逐渐下降; 随之 w^* 值在 w 值附近震荡, 因此在 5000 步到 9000 步, 种群虽处于低位置多样性的状态但出现了震荡. 最后 w 值接近 w^* 值, 此时种群的多样性再次下降.

对图 1 和 2 分析可知, 群体在进化过程中, 种群下一时刻的位置多样性与惯性权重的取值并非简单的单调函数关系. 定理 1 给出了通过惯性权重控制种群多样性的策略设计指导, 首先计算种群下一时刻 $E[I(X(t$

+ 1))] 为极小值时的惯性权重 w^* , 再判断 w 与 w^* 的大小关系. 如果 $w \geq w^*$, 则可以通过增大 w 来增加下一时刻种群位置多样性的期望; 同样, 亦可减小 w 来减小下一时刻种群位置多样性的期望. 如果 $w < w^*$, 则可以通过减小 w 来增加下一时刻种群位置多样性的期望; 同样, 亦可增大 w 的值来减小下一时刻种群位置多样性的期望. w^* 是调整 w 的一个重要参照指标.

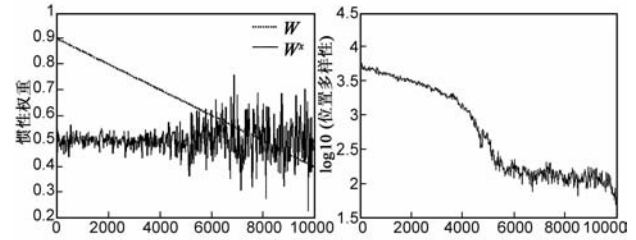


图1 w和w*随迭代次数的变化图

图2 位置多样性随迭代次数的变化图

4.2 加速系数 c_1, c_2 对 $E[I(X(t+1))]$ 的影响

一般地, $a_{22}, a_{33} > 0$. 给定惯性权重 w , $E[I(X(t+1))]$ 可视为关于 c_1, c_2 的二元连续函数. 为了求得 $E[I(X(t+1))]$ 的极小值, 对 $E[I(X(t+1))]$ 分别关于 c_1, c_2 求偏导并令其为零, 得

$$\begin{cases} 2a_{22}c_1 + a_{23}c_2 = -a_2 - a_{12}w \\ a_{23}c_1 + 2a_{33}c_2 = -a_3 - a_{13}w \end{cases} \quad (20)$$

式(20)是关于 c_1, c_2 的一个二元一次线性方程组, 系数行列式 $A = 4a_{22}a_{33} - a_{23}^2$. 将 a_{22}, a_{33} 和 a_{23} 代入 A , 可得

$$\begin{aligned} A = & \left(\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}]^2 \right. \\ & + \frac{N-1}{3N^2M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{ij}(t) - X_{ij}(t)]^2 \\ & \cdot \left(\frac{1}{4NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}]^2 \right. \\ & + \frac{N-1}{12N^2M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{gj}(t) - X_{ij}(t)]^2 \\ & \left. \left. - \left(\frac{1}{2NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}] \right) \right. \right. \\ & \left. \left. [P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}] \right)^2 \right) \quad (21) \end{aligned}$$

由柯西-许瓦兹不等式得

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}] [P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) \right. \\ & \left. + \overline{X_j(t)}] \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}]^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \\ & [P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}]^2 \quad (22) \end{aligned}$$

又由 $a_{22}, a_{33} > 0$ 及式(22)得

$$\begin{aligned} A \geq & \frac{N-1}{12N^3M^2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{ij}(t) - \overline{P_j(t)} - X_{ij}(t) + \overline{X_j(t)}]^2 \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{gj}(t) - X_{ij}(t)]^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{ij}(t) - X_{ij}(t)]^2 \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [X_{ij}(t) - \overline{X_j(t)}]^2 + \frac{(N-1)^2}{36N^4M^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [P_{ij}(t) - X_{ij}(t)]^2 > 0 \quad (23)$$

此时,方程组(20)存在唯一解.

记 c_1^* , c_2^* 分别是使 $E[I(X(t+1))]$ 为极小值的个体认知加速系数和社会认知加速系数. 由方程式(20), 可解得:

$$\begin{cases} c_1^* = A_1/A \\ c_2^* = A_2/A \end{cases} \quad (24)$$

其中 $A_1 = (a_{13}a_{23} - 2a_{12}a_{33})w + a_{23}a_3 - 2a_2a_{33}$, $A_2 = (a_{12}a_{23} - 2a_{13}a_{22})w + a_2a_{23} - 2a_{22}a_3$. 根据 (c_1, c_2) 与 (c_1^*, c_2^*) 的关系, 可以得到如下结论.

定理 2 对于给定的惯性权重 w , 且已知粒子在第 t 时刻的位置 $X(t)$, 速度 $V(t)$, 个体极值 $P_i(t)$ 和群体极值 $P_g(t)$, 则粒子在第 $t+1$ 时刻的位置 $X(t+1)$ 多样性的期望 $E[I(X(t+1))]$ 依赖于加速系数 c_1, c_2 的取值. 具体地:

(1) 当 $c_1 \geq c_1^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 c_1 的增加而增加; 当 $c_1 < c_1^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 c_1 的增加而减少.

(2) 当 $c_2 \geq c_2^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 c_2 的增加而增加; 当 $c_2 < c_2^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 c_2 的增加而减少.

仍采用优化 Rastrigin 函数的实验结果直观分析加速系数 c_1, c_2 对种群多样性 $I(X(t+1))$ 的影响. 为了减小惯性权重对位置多样性的影响, 实验中惯性权重 $w=0.5$, 其他实验参数不变. w^*, c_1^* 和 c_2^* 随迭代步长的变化如图 3 所示, 其中 w^* 采用式(18)计算; 图 4 为该实验的位置多样性随迭代步长的变化图.

由图 3 可见, 在整个迭代过程中, w^* 的取值仍集中在 0.5 附近; c_1^* 集中在 1.25 附近, c_2^* 集中在 1.8 附近, 二者波动皆比较剧烈, 且 $c_2^* > c_1^*$. 在迭代前期(大约 2000 步以前), c_1^* 值较小且有较大的波动和 w^* 在 0.5 附近波动较大, 使得种群位置多样性在迭代前期下降缓慢, 如图 4 所示. 2000 步以后, c_1^* 值有个上升后在 1.25 附近波动, c_2^* 在 1.8 附近波动, 由于实验中 c_1, c_2

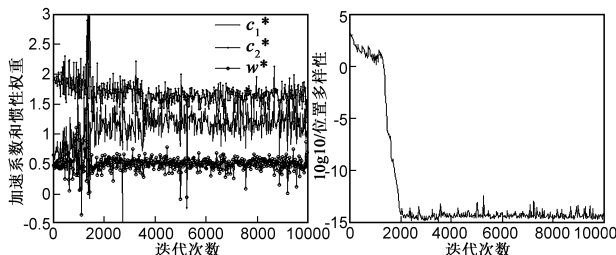


图3 c_1^* 和 c_2^* 随迭代次数的变化图

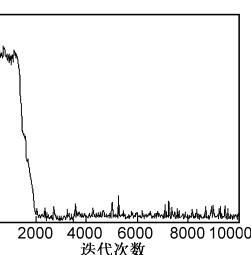


图4 位置多样性随迭代次数的变化图

均设置为 2, 与 c_2^*, c_1^* 相近; 实验中 w 设置为 0.5, 与 w^* 值相近, 两组参数的设置均使得迭代后期种群一直维持了低的位置多样性, 如图 4 所示.

定理 2 给出了相应的策略设计指导, 首先计算种群下一时刻的 $E[I(X(t+1))]$ 为极小值时的加速系数 c_1^* 和 c_2^* , 再判断 c_1^*, c_2^* 与 c_1, c_2 的大小关系. 如果 $c_1 \geq c_1^*$ 或 $c_2 \geq c_2^*$ 则可以通过增大 c_1 或 c_2 来增加下一时刻种群位置多样性的期望; 同样, 亦可减小 c_1 或 c_2 来减小下一时刻种群位置多样性的期望. 如果 $c_1 < c_1^*$ 或 $c_2 < c_2^*$, 则可以通过减小 c_1 或 c_2 来增加下一时刻种群位置多样性的期望; 同样, 亦可增大 c_1 或 c_2 的值来减小下一时刻种群位置多样性的期望. c_1^*, c_2^* 分别是调整 c_1, c_2 的一个重要参照指标.

4.3 参数 w, c_1, c_2 对 $E[I(X(t+1))]$ 的共同影响

更一般地, 同时考虑 w, c_1, c_2 与 $E[I(X(t+1))]$ 的关系. 在 $a_{11}, a_{22}, a_{33} > 0$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 可看作为 w, c_1, c_2 的三元二次函数. 为求得 $E[I(X(t+1))]$ 的极小值点, 将 $E[I(X(t+1))]$ 分别对 w, c_1, c_2 求偏导并令其为零, 得

$$\begin{cases} 2a_{11}w + a_{12}c_1 + a_{13}c_2 = -a_1 \\ a_{12}w + 2a_{22}c_1 + a_{23}c_2 = -a_2 \\ a_{13}w + a_{23}c_2 + 2a_{33}c_2 = -a_3 \end{cases} \quad (25)$$

式(25)是关于 w, c_1, c_2 的一个三元一次线性方程组, 系数矩阵是一个三阶实对称阵. 其行列式 $B = 8a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - 2a_{11}a_{23}^2 - 2a_{22}a_{13}^2 - 2a_{33}a_{12}^2$. 当 $B \neq 0$ 时, 方程组式(25)存在唯一解.

$$\begin{cases} w^* = B_1/B \\ c_1^* = B_2/B \\ c_2^* = B_3/B \end{cases} \quad (26)$$

其中

$B_1 = 2a_{13}a_{22}a_3 + 2a_{12}a_2a_{33} + a_1a_{23}^2 - 4a_1a_{22}a_{33} - a_{12}a_2a_{23} - a_{12}a_{23}a_3$, $B_2 = a_2a_{13}^2 + 2a_1a_{12}a_{33} + 2a_{11}a_3a_{23} - 4a_{11}a_2a_{33} - a_{12}a_{13}a_3 - a_1a_{13}a_{23}$, $B_3 = 2a_1a_{22}a_{13} + 2a_{11}a_2a_{23} + a_{12}^2a_3 - 4a_{11}a_{22}a_3 - a_1a_{12}a_3 - a_2a_{12}a_{13}$. 根据 (w^*, c_1, c_2) 与 (w^*, c_1^*, c_2^*) 的关系, 可以得到如下结论.

定理 3 已知粒子 t 时刻的位置 $X(t)$, 速度 $V(t)$ 及个体极值 $P_i(t)$ 、群体极值 $P_g(t)$, 则粒子在第 $t+1$ 时刻的位置 $X(t+1)$ 的多样性的期望 $E[I(X(t+1))]$ 同时依赖于惯性权重 w , 加速系数 c_1, c_2 的取值. 具体地

(1) 当 $w \geq w^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 w 的增加而增加; 当 $w < w^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 w 的增加而减少.

(2) 当 $c_1 \geq c_1^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 c_1 的增加而增加; 当 $c_1 < c_1^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 c_1 的增加而减少.

(3) 当 $c_2 \geq c_2^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 c_2 的增加而增加; 当 $c_2 < c_2^*$ 时, $E[I(X(t+1))]$ 随着 c_2 的增加而减少.

式(26)给出了使种群下一时刻 $E[I(X(t+1))]$ 达到极小值的惯性权重 w^* , 加速系数 c_1^* , c_2^* 的表达式. 与式(18)、(24)所给的 w^* , c_1^* 和 c_2^* 的计算表达式不同的是, 式(26)给出的 w^* , c_1^* 和 c_2^* 完全由种群中粒子自身的运动特征, 即粒子 t 时刻的位置 $X(t)$, 速度 $V(t)$, 个体极值 $P_i(t)$ 和群体极值 $P_g(t)$ 来决定的.

采用 4.1 节优化 Rastrigin 函数的实验得出了 w^* , c_1^* 和 c_2^* 随迭代步长的变化图, 如图 5 所示; 种群位置多样性的变化如图 2; 图 5 中 w^* , c_1^* 和 c_2^* 的计算公式为式(26). 由图 5 可见, 在整个迭代过程中, w^* , c_1^* 和 c_2^* 的变化更为剧烈, 取值范围更大, 且不再具有较为稳定的取值中心. 由于式(26)给出的 w^* , c_1^* 和 c_2^* 完全由群体中粒子自身的运动特征决定的, 而在进化过程中, 群体中粒子自身的运动特征, 如位置 $X(t)$, 速度 $V(t)$ 取决于随机因子的取值. 由于随机因子的随机性, 使得 w^* , c_1^* 和 c_2^* 变化较为剧烈.

定理 3 给出了同时调整惯性权重和加速系数控制种群位置多样性的设计方案, 具体操作可按 4.1 和 4.2 节中调整 w , c_1 和 c_2 的方法, 不同的是 w^* , c_1^* 和 c_2^* 是由式(26)计算的. 由于 w^* , c_1^* 和 c_2^* 完全由群体中粒子自身的运动特征决定, 采用定理 3 控制种群的位置多样性比固定惯性权重 w 或加速系数 c_1 , c_2 时设计策略更为复杂. 但是, 图 5 中的 w^* , c_1^* 和 c_2^* 却表现出较为相似的变化趋势, 有关规律的进一步研究可为 PSO 算法参数的调整提供更为广阔的研究前景.

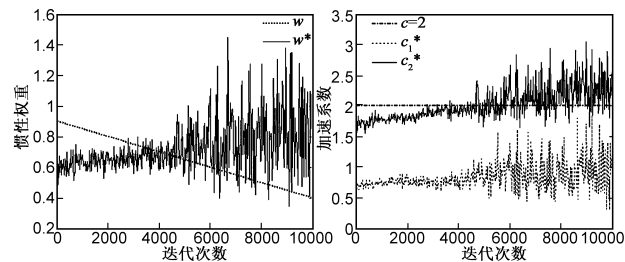


图 5 w^* , c_1^* 和 c_2^* 随迭代次数的变化图 (w 采用递减策略)

5 结论

PSO 学习参数的优化配置是控制种群多样性一个重要途径. 本文从理论上给出了惯性权重 w 、加速系数 c_1 , c_2 与种群下一时刻多样性的期望数学关系. 文中给

出的定理表明: 种群未来的位置多样性与算法学习参数的取值并非简单的单调函数关系, 而是依赖于学习参数与种群多样性函数的极小值点的关系. 学习参数与种群未来位置多样性的数学关系式为 PSO 利用学习参数控制多样性提供了理论的支持, 也为进一步研究 PSO 学习参数与 PSO 的优化性能提供了新的途径.

参考文献

- [1] KENNEDY J, EBERHART R C. Particle swarm optimization [A]. Proceeding of International Conference on Neural Networks [C]. Perth, Australia: IEEE Press, 1995. 1942 - 1948.
- [2] YAMILLE D V, GANESH K V, et al. Particle swarm optimization: Basic concepts, variants and applications in power systems [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2008, 12(2): 171 - 195.
- [3] NIU Q, JIAO B, et al. Particle swarm optimization combined with genetic operators for job shop scheduling problem with fuzzy processing time [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 205: 148 - 158.
- [4] 吕振肃, 侯志荣. 自适应变异的粒子群优化算法 [J]. 电子学报, 2004, 32(3): 416 - 420.
Lü Zhen-su, HOU Zhi-rong. Particle swarm optimization with adaptive mutation [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(3): 416 - 420. (in Chinese)
- [5] 陈贵敏, 贾建援, 等. 粒子群优化算法的惯性权值递减策略研究 [J]. 西安交通大学学报, 2006, 40(1): 54 - 61.
CHEN Guimin, JIA Jianyuan, et al. Study on the strategy of decreasing inertia weight in particle swarm optimization algorithm [J]. Journal of Xi'an Jiao Tong University, 2006, 40(1): 54 - 61. (in Chinese)
- [6] ARUMUGAM M S, RAO M V C, et al. A new and improved version of particle swarm optimization algorithm with global-local best parameters [J]. Journal of Knowledge and Information Systems, 2008, 16(3): 324 - 350.
- [7] RATNAWEERA A, HAKGANYGE S K, et al. Self-organizing hierarchical particle swarm optimizer with time-varying acceleration coefficients [J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 240 - 255.
- [8] CAI X J, CUI Z H, et al. Dispersed particle swarm optimization [J]. Information Processing Letters, 2008, 105(6): 231 - 235.
- [9] 介婧, 曾建潮, 等. 基于群体多样性反馈控制的自组织微粒群算法 [J]. 计算机研究与发展, 2008, 45(3): 464 - 471.
Jie Jing, Zeng Jianchao, et al. Self-organized particle swarm optimization based on feedback control of diversity [J]. Journal of Computer Research and Development, 2008, 45(3): 464 - 471. (in Chinese)
- [10] ZHAN Z H, ZHANG J, et al. Adaptive particle swarm optimization [J]. IEEE Transactions on System, Man, and Cyber-

netics-Part B, 2009, 39(6): 1362 – 1381.

- [11] OLORUNDA O, ENGELBRECHT A P. Measuring exploration/exploitation in particle swarms using swarm diversity [C]. Zbigniew M. Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation [A]. Hongkong, China: IEEE Press,

2008. 1128 – 1134.

- [12] SHI Y H, EBERHART R C. Population diversity of particle swarms [C]. Zbigniew M. Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation [A]. Hongkong, China: IEEE Press, 2008. 1063 – 1067.

作者简介



申元霞 女, 1979年2月出生于安徽省六安市. 博士研究生. 主要研究方向为: 计算智能, 智能信息处理.

Email: yuanxiashen@163.com



王国胤 男, 1970年生于重庆. 博士、教授、博士生导师、IEEE 高级会员. 主要研究方向为: 粗糙集, 粒计算, 认知计算, 智能信息处理, 数据挖掘, 智能信息安全.

E-mail: wanggy@ieee.org